

229: Fonctions monotones, convexes. Ex. et applis.

Plan:

I - Fonctions monotones

a) Définitions et premières propriétés [RAMS]

4.3.1: déf. fct $\nearrow$ et $\searrow$ + monotone big adj. -- + ppt fct monotone $\nearrow$, $\searrow$, 0
mettre cas. artificielle
+ thm limite monotone + cor qui suit p.110-120 [RAMS]

b) Monotonie et régularité [RAMS]

4.5.2: points de discontinuité dénombrable + f continue Δ si f d'intervalle + cor
f induit hémio. + hémio de I à J $\Rightarrow$ f d.p. + dérivée et monotonie
+ caract. appli. strict monotones p.120-122 [RAMS]

faire une rmg / thm thm Lebesgue

c) Suites de fonctions monotones [GOUS]

• limite simple de fct $\nearrow$ et $\nearrow$ (probl $\searrow$)

• éco S = thm Dini p.238 [GOUS]

II - Fonctions convexes

a) Définitions [KOH]

3.1: déf fct convexe, strict convexe, concave ... + déf épigraphe + caract. par épigraphes p.233 [KOH]

b) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ [KOH]

3.1: convexe Δ si corde au dessus courbe (faire dessin) + convexe
 Δ si $t \mapsto f((1-t)x + ty)$ convexe + cor qui suivent + fct continue
convexe Δ si $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ p.234-237

3.2: thm image 3 points (dessin convexe) + aff. Δ si convexe et concave +
f constante Δ si convexe majoré + rmg marche que sur $\mathbb{R}$. +
convexe dérivable en a $f'(a) \geq 0 \Leftrightarrow$ a minimum global + min local est
global + ppt dérivée à gauche et à droite + convexe sur I $\Rightarrow$ continue sur
I + f convexe Δ si f d $\nearrow$ + thm convexe Δ si f $\nearrow$ Δ si corde au dessus
tangente (faire dessin) + rmg sur strict convexe + prop sur f' ≥ 0 +
cor qui suivent p.238-247 [KOH]

c) Fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ [RAMS]

3.4.2: caract $t \mapsto f(tx + (1-t)y)$ + caract convexité par différentiabilité
+ caract. par différentielle 2nd p.342-343 [RAMS]

III - Exemples et applications

a) Inégalités liées à la convexité [AUDJCFOROM]

• inégalité Jensen p.78 [RUDJ] + (dans la suite) $(y_1 - y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum y_i$

• inég Jensen en probab p.129 [FORJ]

• Jensen appli aux martingales p.121 [ZFORJ]

• $u^p v^q \leq \frac{p}{p+q} u^{p+q} + \frac{q}{p+q} v^{p+q}$ p.233 [KOH]

• Hölder + Minkowski + cor (2°, 11-11p) evm p.79 [RUDJ]

b) Etude Γ [GOUS]

def $\Gamma + \Gamma C^\infty + \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) + \Gamma$ convexe et en-concave p.315 [GOUS]

c) Système proie prédateur

Lotka - Volterra DEVI p.197-198 [GEPJ]

d) Optimisation dans un Hilbert [ISEJ]

def fct coercive + f continue convexe coercive $\Rightarrow$ réalise son inf DEVP.
[ISEJ] p.176 [ECLA]

Références:

[RAMS]: Ramis, Dechamps, Ollivier - Cours de math 3

[GOUS]: Goursat, analyse 3e

[KOH]: Koebe, éléments d'analyse réelle

[RUDJ]: Rudin, Analyse réelle et complexe

[FORJ]: Folland, Fuchs, Probabilités et statistiques

[ISEJ]: Iannucci, Bercelagres

[ECLA]: Charlet, anal. num.

[BERJ]: Berthelin, équ. diff.

Commentaires

- Je pense on peut remplacer [FORJ] par Chubert

- Il a def. valable dans un evm ploc.